

itüdergisi/d**mühendislik**

Cilt:2, Sayı:1, 35-44

Şubat 2003

İnce plaklar için geliştirilmiş sonlu farklar yöntemi

Ali ERGÜN*, Nahit KUMBASAR*İTÜ İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul*

Özet

İnce plaklar için geliştirilmiş sonlu fark yöntemi, klasik sonlu fark ifadelerinin çıkartılışından tamamen bağımsız bir yöntemle ortaya konulmuştur. Bu yöntemde sonsuz bir plak ele alınarak belirli bir bölgesi için çökme yüzeyi tanımlanmakta ve sonsuz plak çökme yüzeyini oluşturan yükler, plak diferansiyel denkleminde yararlanılarak bulunmaktadır. Sonlu fark operatörünün uygulanacağı gerçek plağın çökme yüzeyi ise, sonsuz plak için tanımlanan çökme yüzeyine karşılık gelecek şekilde 5×5 düğümlü iki boyutlu Lagrange interpolasyon fonksiyonları kullanılarak bilinmeyen plak çökmelerine bağlı bir polinom ile ifade edilmektedir. İki farklı yük-çökme sistemine Betti karşılık teoremi uygulanarak yeni sonlu fark operatörü elde edilmiştir. Bulunan sonlu fark operatörü ile plak problemlerin çözümünde önemli yaklaşıklık sağlanmış ve kapalı çözüm sonuçlarına ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Geliştirilmiş sonlu farklar, Lagrange fonksiyonları, plak.*

Improved finite differences method for thin plates

Abstract

In this study, a developed method is proposed that provides convergence with using fewer unknowns for plate problems. Improved finite differences scheme for thin plates is provided in a new way which differs from classical finite difference method. For determining new finite difference operator, two different load-deflection systems on the same finite element are considered. The first system consists of given deflected surface domain and load cases of defined infinite plate; load cases for defined infinite plate are calculated from governing differential equation. The second system consists of actual plate and loads on actual plate. The deflected surface on the actual plate on which will finite difference operator will be applied is expressed with Lagrange interpolation polynomial depending on unknown plate deflections. For the actual plate, Lagrange interpolation polynomial has 5×5 joints and is related to given deflection surface domain of defined infinite plate. Applying Betti's reciprocal theorem on two different load-deflection systems a new finite difference operator will be defined. This method is applied for rectangular plate bending problems, which have different load cases and boundary conditions. Then, the results of solution by this technique are compared to analytical solutions and other numerical solutions. The results of applications by this method supplied quite high performance.

Keywords: *Improved finite differences, Lagrange functions, plate.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Ali ERGÜN. aergun@aku.edu.tr; Tel: (272) 228 13 11.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ İnşaat Fakültesi'nde tamamlanmış "İnce plaklar için geliştirilmiş sonlu fark yöntemi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 29.07.2002 tarihinde dergiye ulaşmış, 25.12.2002 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2003 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Sonlu farklar yöntemi, çeşitli diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri elde edilemediğinde, kullanılan sayısal ve yaklaşık yöntemlerdendir (Berktaş, 1992). İnce plakların dördüncü dereceden kısmi türevli, diferansiyel denklemi:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \quad (1)$$

için sonlu farklar yöntemi uygulandığında; seçilen ağ düğümlerinde diferansiyel büyüklüklere göre denklemdeki türevler bulunmakta ve problem için sonlu fark operatörü elde edilmektedir (Szilard, 1974). Klasik sonlu fark adını verilen bu çalışmalarda kullanılan klasik sınır koşulları daha düşük mertebedeki türev bağıntılarından elde edildiğinden, bazı sınır koşullarında çözümün yaklaşıklığı azalmaktadır. Klasik sonlu fark ifadeleri ile daha iyi sonuç bulunabilmesi için Kumbasar (1999) tarafından yapılan çalışmada, diferansiyel denklemle aynı mertebeden olan dördüncü mertebe enterpolasyonla elde edilen sınır koşulları verilmiştir. Klasik sınır koşulu bağıntıları yerine, band genişliği ve bilinmeyen sayısını arttırmaksızın, daha yüksek dereceli bir enterpolasyonla elde edilmiş sınır koşulları kullanarak, plak problemlerinin çözümlerinde önemli düzeyde iyileştirme sağlanabileceğini göstermiştir.

Çakıroğlu ve Kayan (1963); Çakıroğlu ve Kumbasar (1995), sonlu farklar yöntemini daha iyi bir yöntem haline getirebilmek için, klasik sonlu fark operatörü kullanarak ve Betti teoreminden yararlanarak:

$$[\Delta]w = \iint q(x,y)K(x,y)dxdy \quad (2)$$

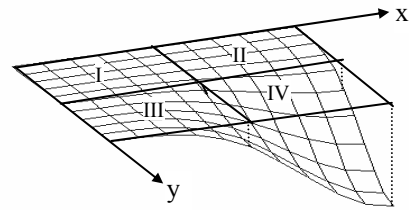
bağıntısındaki sonlu fark denklemlerinin sağ tarafı için $K(x,y)$ ağırlık fonksiyonu tanımlanmakta ve bu fonksiyonun yardımıyla çözümler bulunmaktadır. $K(x,y)$ ağırlık fonksiyonu, tekil yük etkisindeki sonsuz plak için bilinen kapalı çözümünden elde edilmiştir. $K(x,y)$ ağırlık fonksiyonu, şiddet ve yerleri plak problemlerine uygulanan sonlu fark operatöründe görülen

(20,-8,2,1 gibi) tekil yüklerin etkisindeki sonsuz plağın çökme yüzeyine karşılık gelmektedir. Bir başka çalışmada klasik sonlu fark operatöründeki (20,-8,2,1 gibi) tekil yüklerin yerine, ip çokgeni yöntemindeki sonlu fark operatöründe şiddet ve yerleri verilen (1872,-576,-32,72,32,4 gibi) tekil yüklerle ilişkili $K(x,y)$ ağırlık fonksiyonu tanımlanarak çözümler bulunmuştur (Kumbasar, 1998).

İnce plaklar için geliştirilen sonlu fark yönteminde daha önceki çalışmalardan farklı olarak (2) eşitliğinin sol tarafı için yeni bir sonlu fark operatörü bulunmakta ve bu operatöre karşılık gelen (2) eşitliğinin sağ tarafı için farklı bir $K(x,y)$ ağırlık fonksiyonu hesaplanmaktadır. Gerek sonlu fark operatörünün, gerekse $K(x,y)$ ağırlık fonksiyonunun hesaplanmasında virtüel iş prensibine göre Betti karşılıklı teoreminden yararlanılmıştır.

Sonlu fark denkleminin elde edilmesi

Eğilme rijitliği D olan ince plak için diferansiyel denklemde (1), w çökmeyi, $q(x,y)$ ise plak üzerindeki yayılı yükü ifade eder. (1) denkleminin sonlu farklarla çözümü için geliştirilen (2) eşitliğinde, $[\Delta]$ sonlu fark operatörü, w aranan çökme değeri, $K(x,y)$ ise eşitliği sağlayan ağırlık fonksiyonudur. Burada $[\Delta]$ sonlu fark operatörünün çıkartılmasında ilk önce sonsuz plağın belirli bir bölgesi için çökme yüzeyi tanımlanacaktır. 4×4 bölgeden oluşan çökme yüzeyi, bölgenin dış sınırlarında çökmeler ile, çökmelerin birinci ve ikinci türevleri sıfır ve alt bölgelerin komşu sınırlarında çökmeler ile, çökmelerin birinci ve ikinci türevleri birbirine eşit olacak şekilde seçilmiştir. Tanımlanan sonsuz plak bölgesinin, simetriden dolayı 2×2 lik alt bölgeleri için çökme yüzeyi, Şekil 1'de gösterilmiştir ve:



Şekil 1. Sonsuz plağın sol üst çeyrek bölgesi için tanımlanan çökme yüzeyi

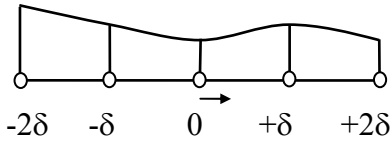
$$w_I(x, y) = \frac{x^3 y^3}{36D} \quad (3a)$$

$$w_{II}(x, y) = \frac{1}{D} \left[\frac{x^3}{6} - \frac{2}{3}(x - \delta)^3 \right] \frac{y^3}{6} \quad (3b)$$

$$w_{III}(x, y) = \frac{1}{D} \left[\frac{y^3}{6} - \frac{2}{3}(y - \delta)^3 \right] \frac{x^3}{6} \quad (3c)$$

$$w_{IV}(x, y) = \frac{1}{D} \left[\frac{x^3}{6} - \frac{2}{3}(x - \delta)^3 \right] \left[\frac{y^3}{6} - \frac{2}{3}(y - \delta)^3 \right] \quad (3d)$$

olarak tanımlanmaktadır. Sonlu fark operatörünün uygulanacağı gerçek plağın çökme yüzeyi ise 5×5 düğümlü iki boyutlu Lagrange interpolasyon polinomlarından yararlanılarak temsil edilecektir (Kumbasar v. diğ., 1992). İki boyutlu Lagrange interpolasyon polinomları, bir boyutlu 5 düğümlü Lagrange interpolasyon polinomlarının diğer boyuta uygulanması ile bulunur. Şekil 2’de verilen koordinatlara göre 5 düğümlü Lagrange fonksiyonları:



Şekil 2. Beş düğümlü Lagrange interpolasyon polinom eğrisi

$$x = -2\delta \text{ için:} \\ L_1(x) = \frac{1}{24\delta^4} (x^4 - 2\delta x^3 - \delta^2 x^2 + 2\delta^3 x) \quad (4a)$$

$$x = -\delta \text{ için:} \\ L_2(x) = -\frac{1}{6\delta^4} (x^4 - \delta x^3 - 4\delta^2 x^2 + 4\delta^3 x) \quad (4b)$$

$$x = 0 \text{ için:} \\ L_3(x) = \frac{1}{4\delta^4} (x^4 - 5\delta^2 x^2 + 4\delta^4) \quad (4c)$$

$$x = +\delta \text{ için:} \\ L_4(x) = -\frac{1}{6\delta^4} (x^4 + \delta x^3 - 4\delta^2 x^2 - 4\delta^3 x) \quad (4d)$$

$$x = +2\delta \text{ için:} \\ L_5(x) = \frac{1}{24\delta^4} (x^4 + 2\delta x^3 - \delta^2 x^2 - 2\delta^3 x) \quad (4e)$$

olarak bulunur. Gerçek plak çökme yüzeyi için Lagrange interpolasyon polinomu:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 w_{ij} L_i(x) L_j(y) \quad (5)$$

formundadır. Tanımlanan sonsuz plakta çökme yüzeyini oluşturan her bölge için dış yükler ise (1) bağıntısından hesaplanarak:

$$P_I(x, y) = 2xy \quad (6a)$$

$$P_{II}(x, y) = 2(4-3x)y \quad (6b)$$

$$P_{III}(x, y) = 2(4-3y)x \quad (6c)$$

$$P_{IV}(x, y) = 2(4-3x)(4-3y) \quad (6d)$$

şeklinde, bölge sınırlarında oluşan çizgisel yayılı yükler ise:

$$V(x) = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \quad (7a)$$

$$V(y) = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (7b)$$

şeklinde eşdeğer kesme kuvvetleri bağıntılarından yararlanılarak bulunur. Ayrıca, bölgelerin köşelerinde, burulma momentlerinden kaynaklanan $R_o = 2M_{xy}$ köşe kuvvetleri de hesaplanır. Bölge sınırındaki iç kuvvetler, plak yönleri dikkate alınarak birleştirilirse, R_o köşe kuvveti sıfır ve eşdeğer kesme kuvvetleri de aşağıdaki değerleri alır:

$$y = 0 \text{ sınırında:} \\ 0 \leq x \leq \delta \text{ için } V(x) = \frac{x^3}{6} \quad (8a)$$

$$\delta \leq x \leq 2\delta \text{ için } V(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{2}{3}(x - \delta)^3$$

$y = \delta$ sınırında:

$$0 \leq x \leq \delta \quad \text{için} \quad V(x) = -\frac{2}{3}x^3 \quad (8b)$$

$$\delta \leq x \leq 2\delta \quad \text{için} \quad V(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}(x - \delta)^3$$

$y = 2\delta$ sınırında:

$$0 \leq x \leq \delta \quad \text{için} \quad V(x) = \frac{x^3}{2} \quad (8c)$$

$$\delta \leq x \leq 2\delta \quad \text{için} \quad V(x) = \frac{x^3}{2} - 2(x - \delta)^3$$

$x = 0$ sınırında:

$$0 \leq y \leq \delta \quad \text{için} \quad V(y) = \frac{y^3}{6} \quad (8d)$$

$$\delta \leq y \leq 2\delta \quad \text{için} \quad V(y) = \frac{y^3}{6} - \frac{2}{3}(y - \delta)^3$$

$x = \delta$ sınırında:

$$0 \leq y \leq \delta \quad \text{için} \quad V(y) = -\frac{2}{3}y^3 \quad (8e)$$

$$\delta \leq y \leq 2\delta \quad \text{için} \quad V(y) = -\frac{2}{3}y^3 + \frac{8}{3}(y - \delta)^3$$

$x = 2\delta$ sınırında:

$$0 \leq y \leq \delta \quad \text{için} \quad V(y) = \frac{y^3}{2} \quad (8f)$$

$$\delta \leq y \leq 2\delta \quad \text{için} \quad V(y) = \frac{y^3}{2} - 2(y - \delta)^3$$

Plak üzerinde bulunan $q(x,y)$ yükü ve bu yük altında gerçek plağın çökme yüzeyi (5) ile gerçek plak üzerine uygulanan sonlu fark operatörüne karşılık gelen, sonsuz plak için tanımlanan çökme yüzeyi (3a-d) ve bu yüzeyi oluşturan yükler (6a-d) ve (8a-f) bağıntılarıyla bilinmektedir. Betti teoremi iki farklı yük-çökme sistemine uygulandığında; sonsuz plağın tanımlanan çökme yüzeyini oluşturan yüklerin, gerçek plağın çökmeleriyle yaptığı virtüel iş

göre (2) bağıntısının sol tarafı için sonlu fark operatörü bulunur.

Sonsuz plak için tanımlanan çökme yüzeyini oluşturan dış yüklerin (6a-d), gerçek plağın çökme yüzeyi (5) üzerinde yaptığı virtüel iş bölgenin sol üst çeyreği için aşağıdaki integrallerle hesaplanır. Burada gerçek plağın çökme yüzeyini veren (5) bağıntılarındaki $x=0$ düğümü başlangıç olarak dikkate alındığında, dış yüklerin bu başlangıca göre dönüşümü yapılması gerekir.

$$\iint \sum_{i=1}^4 P_i(x, y) \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 w_{ij} L_i(x) L_j(y) dx dy \quad (9)$$

İntegrallerin diğer $\frac{1}{4}$ bölgeler için de hesabı yapılarak bulunan değerler taraf tarafa toplanırsa yalnız dış yük durumu için sonlu fark operatörünün ifadesi bulunur:

$$\frac{\delta^4}{72} \begin{bmatrix} 1 & 8 & -18 & 8 & 1 \\ 8 & 64 & -144 & 64 & 8 \\ -18 & -144 & 324 & -144 & -18 \\ 8 & 64 & -144 & 64 & 8 \\ 1 & 8 & -18 & 8 & 1 \end{bmatrix} [w_{ij}] \quad (10)$$

Sonsuz plak için tanımlanan çökme yüzeyini oluşturan bölge sınırındaki eşdeğer kesme kuvvetlerinin (8a-f), gerçek plağın bölge sınırındaki çökme yüzeyi üzerinde yaptığı virtüel iş bölgenin sol üst çeyreği için aşağıdaki sınır üzerinde integrallerle hesaplanır. İntegrallerde eşdeğer kesme kuvvetlerinin, gerçek plak çökme yüzeyini veren başlangıç noktasına göre dönüşümleri alınmalıdır.

$$\int \sum_{i=1}^4 V_i(x) \sum_{i=1}^5 w_i L_i(x) dx + \int \sum_{i=1}^4 V_i(y) \sum_{j=1}^5 w_j L_j(y) dy \quad (11)$$

İntegrallerin diğer $\frac{1}{4}$ bölgeler için de hesaplamaları yapılarak bulunan değerler taraf tarafa toplanırsa yalnız sınırlardaki eşdeğer kesme kuvvetleri için sonlu fark operatörünün ifadesi bulunur:

$$\frac{\delta^4}{72} \begin{bmatrix} -0.2 & 128 & 468 & 128 & -0.2 \\ 128 & -99.2 & -1152 & -99.2 & 128 \\ 468 & -1152 & 5688 & -1152 & 468 \\ 128 & -99.2 & -1152 & -99.2 & 128 \\ -0.2 & 128 & 468 & 128 & -0.2 \end{bmatrix} [w_{ij}] \quad (12)$$

Sonuç olarak; tanımlanan sonsuz plak için çökme yüzeyini oluşturan bölge dış yükü ve sınırlarındaki eşdeğer kesme kuvvetlerinin gerçek plak çökme yüzeyi yer değiştirmeleri ile yaptığı virtüel işler, ayrı ayrı hesaplanmıştır. Her iki durumda bulunan (10) ve (11) bağıntısıyla verilen operatörler taraf tarafa toplanırsa, bölgenin tümü için (2) eşitliğinin sol tarafında bulunan, sonlu fark operatörü (13) bağıntısındaki formu alır:

$$[\Delta]w = \frac{\delta^4}{72} \begin{bmatrix} 0.8 & 208 & 288 & 208 & 0.8 \\ 208 & -352 & -2592 & -352 & 208 \\ 288 & -2592 & 8928 & -2592 & 288 \\ 208 & -352 & -2592 & -352 & 208 \\ 0.8 & 208 & 288 & 208 & 0.8 \end{bmatrix} [w_{mn}] \quad (13)$$

K(x,y) ağırlık fonksiyonlarının elde edilmesi

K(x,y), (2) eşitliğinin sağ tarafını sağlayan gerçek plak üzerinde bulunan q(x,y) yükünün, tanımlanan sonsuz plak çökme yüzeyi ile yaptığı virtüel işe göre belirlenen ağırlık fonksiyonudur. K(x,y) ağırlık fonksiyonu, plak üzerinde bulunan q(x,y) yükünün etkiye durumlarına göre değişik değerler alacaktır. Etkime durumları ağ düğümlerinde tekil kuvvet, sınırlar üzerinde çizgisel yayılı yük ve bölgesel yayılı yük şeklinde olabilir.

Ağ düğümlerinde tekil kuvvet durumu

Plak üzerinde bulunan q(x,y) yükü, ağ düğümlerinde tekil kuvvet q_{mn} şeklinde ise K(x,y) ağırlık fonksiyonu, sonsuz plak için tanımlanan ağ düğümlerinde çökme değerlerine karşılık gelecektir. (2) eşitliğinin sağ tarafı aşağıdaki formu alır:

$$[K(x, y)][q] = \frac{\delta^6}{36D} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [q_{mn}] \quad (14)$$

Çizgisel yayılı yük durumu

Plak üzerinde bulunan q(x,y) yükü, x doğrultusunda q(x) çizgisel yayılı yükü olarak ifade edilebilirse, q(x) çizgisel yayılı yükün bulunduğu sınıra karşılık gelen tanımlanan sonsuz plak çökme yüzeyi ile yaptığı virtüel iş K(x,y) ağırlık fonksiyonunu verecektir. q(x) çizgisel yayılı yükü, tanımlanan sonsuz plağın sınırlarına göre bir boyutlu iki düğümlü Lagrange interpolasyon polinomları ile ifade edilecektir:

$$q(x) = \sum_1^2 q_i L_i(x) \quad (15)$$

$$\int q(x)K(x, y)dx = \int w_1 \sum_{i=1}^2 q_i L_i(x)dx \quad (16)$$

w_1 , q(x) çizgisel yayılı yükün bulunduğu sınıra karşılık gelen, sonsuz plağın çökmeleri, q_i ise q(x) çizgisel yayılı yükün düğümlerdeki değeri olmak üzere integrallerin hesaplanması sonucu K(x,y) fonksiyonu bulunur. Bu durumda (2) eşitliğinin sağ tarafı aşağıdaki formu alır:

$$\int q(x)K(x, y)dx = \frac{\delta^7}{36D} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 1.3 & 3.3 & 1.3 & 0.05 \\ 0.2 & 5.2 & 13.2 & 5.2 & 0.2 \\ 0.05 & 1.3 & 3.3 & 1.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [q_{mn}] \quad (17)$$

Bölgesel yayılı yük durumu

Plak üzerinde bulunan q(x,y) yükü, bölgesel yayılı yük halinde ise, bu durumda q(x,y) bölgesel yayılı yükün tanımlanan sonsuz plak çökme yüzeyi yer değiştirmeleri ile yaptığı virtüel iş, K(x,y) ağırlık fonksiyonunu verecektir. q(x,y) bölgesel yayılı yükü, tanımlanan sonsuz plağın bölgelerine göre iki boyutlu dört düğümlü Lagrange interpolasyon polinomları ile ifade edilecektir:

$$q(x, y) = \sum_1^4 q_{ij} L_i(x) L_j(y) \quad (18)$$

$$\iint q(x)K(x,y)dxdy = \iint w_i \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q_{ij} L_i(x) L_j(y) dxdy \quad (19)$$

w_i , $q(x,y)$ bölgesel yayılı yüküne karşılık gelen, sonsuz plağın çökmeleri, q_{ij} ise $q(x,y)$ bölgesel yayılı yükün düğümlerindeki değeri olmak üzere, integrallerin hesaplanması sonucu $K(x,y)$ ağırlık fonksiyonu bulunur. Bu durumda (2) bağıntısının sağ tarafı (20) bağıntısıyla verilen formu alır.

$$\iint q(x,y)K(x,y)dxdy = \frac{\delta^8}{36D} \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.065 & 0.165 & 0.065 & 0.0025 \\ 0.065 & 1.69 & 4.29 & 1.69 & 0.065 \\ 0.165 & 4.29 & 10.89 & 4.29 & 0.165 \\ 0.065 & 1.69 & 4.29 & 1.69 & 0.065 \\ 0.0025 & 0.065 & 0.165 & 0.065 & 0.0025 \end{bmatrix} [q_{mn}] \quad (20)$$

Sınır koşulları

Plak problemlerinin dış yükler altında çözümünün sağlanabilmesi için diferansiyel denklemin çözümü yanında sınır koşullarının da sağlanması gerekir. Burada, sınır koşulları olarak basit mesnetli ve ankastre mesnetli durumlar incelenecektir.

Basit mesnetli durum

Basit mesnetli plak kenarında çökmeler ($w=0$) ve o doğrultuda eğilme momentleri ($M_x=0$ veya $M_y=0$) sıfırdır. Basit mesnetli olarak verilen plak, x ve y doğrultularında aynı boyutlarda sonsuz sayıda sürekli bir plak olarak düşünülebilir. Plak ve üzerinde bulunan dış yükler ise, basit mesnetli kenara göre antisimetrik olarak sürekli plak üzerinde bulunacaktır. Dolayısıyla sürekli plağı oluşturan her bir plak için, basit mesnet kenarına eşit uzaklıkta bulunan komşu plak düğümlerinin çökmeleri, birbirleriyle zıt işaretli olarak sonlu fark operatöründe hesaba katılır.

Ankastre mesnetli durum

Ankastre mesnetli plak kenarında çökmeler ($w=0$) ve o doğrultuda dönmeler ($\partial w/\partial x=0$ veya $\partial w/\partial y=0$) sıfırdır. Ankastre mesnetli olarak verilen plak, x ve y doğrultularında aynı

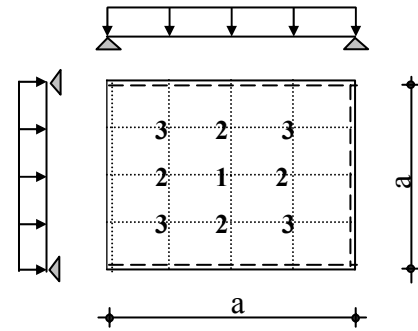
boyutlarda sonsuz sayıda sürekli bir plak olarak düşünülebilir. Plak ve üzerinde bulunan dış yükler ise, ankastre mesnetli kenara göre simetrik olarak sürekli plak üzerinde bulunacaktır. Bu durumda sınır koşulları, ankastre mesnet kenarına eşit uzaklıkta bulunan komşu plak düğümlerinin çökmeleri, birbirleriyle aynı işaretli olarak sonlu fark operatöründe hesaba katılırken, sınır boyunca oluşan mesnet reaksiyon kuvvetleri ise bir plağın reaksiyonunun iki katı büyüklüğünde bilinmeyen olarak gelecektir. Bilinmeyen reaksiyon kuvvetleri için ilave sonlu fark denklemleri ankastre mesnet boyunca uygulanacaktır.

Örnekler

Geliştirilen sonlu fark yöntemi ile çeşitli plak problemleri için sayısal uygulamalar verilmiştir. Çözümün sonuçları, kapalı çözümle bulunan değerlerle (Timoshenko, 1964; Bares, 1979) ve sonlu elemanlar yöntemini kullanan SAP90 programı (Wilson ve Habibullah, 1989), ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırması yapılmıştır.

Örnek 1

Düzgün yayılı yük etkisinde dört kenarından basit mesnetli kare plakta $\delta=a/4$ ağ kullanılarak, $\nu=0.3$ için çözüm:



Şekil 3. Düzgün yayılı yük taşıyan 4 kenarı basit mesnetli plak

Önerilen yöntemin denklem takımı:

$$\begin{aligned} 892.8w_1 - 1036.8w_2 - 140.8w_3 &= 72 q\delta^4/D \\ -259.8w_1 + 822.4w_2 - 518.4w_3 &= 66 q\delta^4/D \\ -35.2w_1 - 518.4w_2 + 892.8w_3 &= 60.5 q\delta^4/D \end{aligned}$$

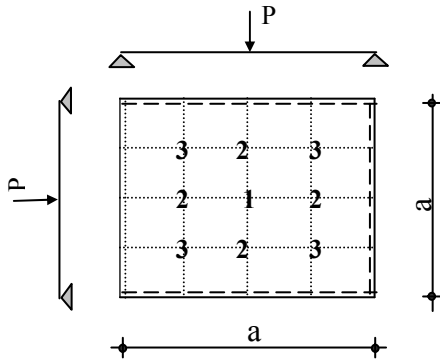
dır. Çözüm sonuçları aşağıda verilmiştir:

	Önerilen yöntem	Kapalı çözüm	SAP90 16 S.E.	Çarpan
$w_1=w_{\max}$	0.004058	0.004057	0.004046	qa^4/D
w_2	0.002934	0.002950	0.002904	qa^4/D
w_3	0.002130	0.002170	0.002094	qa^4/D

Aynı problemin SAP90 programı ile 16 sonlu eleman kullanarak elde edilen çözümünün sonuçları da verilmiştir. 64 eleman kullanarak, $w_1=w_{\max}=0.004060 qa^4/D$ bulunmuştur.

Örnek 2

Ortasında P tekil yük taşıyan dört kenarından basit mesnetli kare plakta $\delta=a/4$ ağ kullanılarak, $\nu=0.3$ için çözüm:



Şekil 4. Ortasında P tekil yük taşıyan 4 kenarı basit mesnetli plak

Önerilen yöntemin denklem takımı:

$$\begin{aligned} 892.8w_1 - 1036.8w_2 - 140.8w_3 &= 32 P\delta^2/D \\ -259.8w_1 + 822.4w_2 - 518.4w_3 &= 8 P\delta^2/D \\ -35.2w_1 - 518.4w_2 + 892.8w_3 &= 2 P\delta^2/D \end{aligned}$$

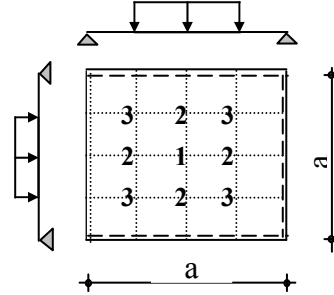
ve denklem takımının çözümünden:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_{\max} = 0.011304 Pa^2/D \\ w_2 &= 0.007160 Pa^2/D \\ w_3 &= 0.004743 Pa^2/D \end{aligned}$$

bulunur. Analitik çözümle bulunan değer $w_1=w_{\max}=0.01160 Pa^2/D$ dir. Önerilen yöntem ile bulunan değerle karşılaştırıldığında %2.5 hata vermektedir. SAP90 programı ile 16 eleman kullanarak $w_1=0.01269 Pa^2/D$ ve 64 eleman kullanarak $w_1=0.01194 Pa^2/D$ değerleri bulunmuştur.

Örnek 3

Orta alanda $a/2 \times a/2$ lik kısmi q düzgün yayılı yük etkisinde dört kenarından basit mesnetli kare plakta $\delta=a/4$ ağ kullanılarak, $\nu=0.3$ için çözüm:



Şekil 5. Orta alanda q düzgün yayılı yük taşıyan 4 kenarı basit mesnetli plak

Önerilen yöntemin operatörü uygulanarak:

$$\begin{aligned} 892.8w_1 - 1036.8w_2 - 140.8w_3 &= 60.5q\delta^4/D \\ -259.8w_1 + 822.4w_2 - 518.4w_3 &= 33q\delta^4/D \\ -35.2w_1 - 518.4w_2 + 892.8w_3 &= 18q\delta^4/D \end{aligned}$$

denklem takımı elde edilir. Çözüm sonucu:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.002128 qa^4/D \\ w_2 &= 0.001467 qa^4/D \\ w_3 &= 0.001014 qa^4/D \end{aligned}$$

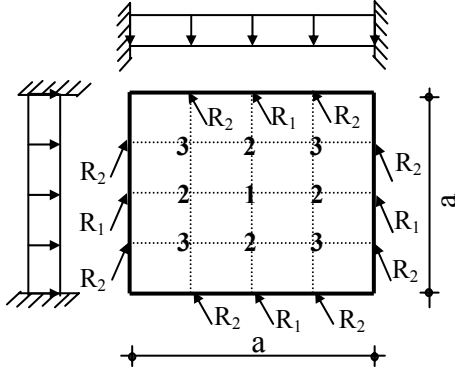
bulunur. Navier yöntemi ile analitik çözümle;

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.002131 q(a)^4/D \\ w_2 &= 0.001468 q(a)^4/D \\ w_3 &= 0.001015 q(a)^4/D \end{aligned}$$

değerleri bulunur.

Örnek 4

Düzgün yayılı yük etkisinde dört kenarından ankastre kare plakta $\delta=a/4$ ağ kullanılarak, $\nu=0.3$ için çözüm:(Geliştirilmiş sınır koşulları kullanılması durumunda ankastre mesnet boyunca reaksiyon kuvvetleri R_1 ve R_2 de bilinmeyen olarak dikkate alınacak ve bu düğümler de sonlu fark operatörü uygulanacaktır)



Şekil 6. q düzgün yayılı yük etkisinde dört kenarından ankastre kare plak

Önerilen yöntemin denklem takımı:

w_1	w_2	w_3	$R_1\delta^2/D$	$R_2\delta^2/D$	$q\delta^4/D$
892.8	-1036.8	-140.8	+0	+0	=72
-259.2	+880.0	-435.2	+16	+8	=72
-35.2	-435.2	+1011.2	+8	+32	=72
+57.6	-435.2	-140.8	+64	+32	=72
+41.6	-9.6	-435.2	+16	+72	=72

oluşturulur ve denklem takımının çözümünden:

$$w_1=0.001244 \text{ } qa^4/D$$

$$w_2=0.000739 \text{ } qa^4/D$$

$$w_3=0.000448 \text{ } qa^4/D$$

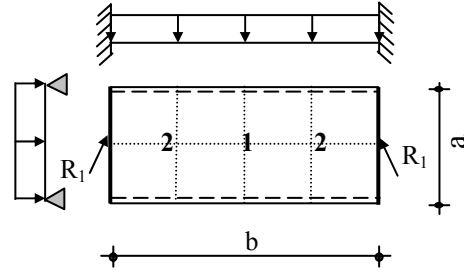
$$R_1=0.1129 \text{ } qa^2$$

$$R_2=0.0703 \text{ } qa^2$$

Analitik çözümle bulunan değeri, geliştirilmiş sonlu farklarla yapılan çözümle karşılaştırıldığında; $w_1=(w)_{\max}=0.001263 \text{ } qa^4/D$ hata %1.9 dur. SAP90 programı ile 16 elemanla $w_1=w_{\max}=0.001461 \text{ } qa^4/D$ ve $w_1=w_{\max}=0.00132 \text{ } qa^4/D$ değeri 64 elemanla bulunmuştur.

Örnek 5

Düzgün yayılı yük etkisinde iki karşılıklı kenarından basit mesnetli, diğer kenarlarından ankastre $b/a=2$ olan plakta $\delta=a/2$ aralıklı ağ kullanılarak $\nu=0.3$ için çözüm:



Şekil 7. İki karşılıklı kenarından basit mesnetli, diğer kenarlarından ankastre plak $b/a=2$

Denklem çözümü ile bulunan sonuçlar; $w_1=w_{\max}=0.008230 \text{ } qa^4/D$, $w_2=0.005192 \text{ } qa^4/D$, $R_1=0.4016 \text{ } qa^2$, analitik çözümle bulunan sonuç $w_1=w_{\max}=0.008443 \text{ } qa^4/D$ ile karşılaştırıldığında %2.5 hata bulunmuştur. Problemin $\delta=a/4$ aralıklı ağ kullanılarak geliştirilmiş sonlu farklar çözümü ile $w_1=w_{\max}=0.008427 \text{ } qa^4/D$ sonucu bulunarak analitik çözümle hemen hemen aynı değerler elde edilmiştir.

İç kuvvetler

İç kuvvetlerin türevli ifadeleri, plağın seçilen ağ düğümlerinde çökmelere bağlı diferansiyel büyüklüklere göre Szilard (1974)'da verilen, bir değişkenli türevlerin sonlu farklarla ifadesi kullanılarak bulunabilir. Daha az ağ düğüm kullanılarak çözümü bulunan plak çökmelerine bağlı iç kuvvetlerin, kapalı çözümlerle elde edilen değerlere yaklaşıklığı, plak çökmelerinin yaklaşıklığı kadar hızlı değildir. İç kuvvetlerin daha hassas elde edilebilmesi için, az sayıda seçilen ağ düğümleri ile geliştirilmiş sonlu farklar yöntemi çözümüyle bulunan plak çökme değerlerinin ara ağ düğümlerindeki değerleri, Lagrange interpolasyon polinomlarından yararlanılarak, yeniden denklem takımı oluşturmadan, kolaylıkla hesaplanabilir.

Düzgün yayılı yük etkisinde dört kenarından basit mesnetli kare plağın $\delta=a/4$ aralıklı ağ kullanılarak $\nu=0.3$ için geliştirilmiş sonlu farklar yöntemi ile çözümü yapılmış $w_1=0.004058 \text{ } qa^4/D$, $w_2=0.002934 \text{ } qa^4/D$, $w_3=0.002130 \text{ } qa^4/D$ değerleri bulunmuştur. $\delta=a/4$ ağ için 1 düğümünde eğilme moment ifadeleri:

$$(M_x)_{m,n} = \frac{-D}{\delta^2} [(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}) + v(w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1})] \quad (21)$$

$$(M_y)_{m,n} = \frac{-D}{\delta^2} [(w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}) + v(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n})] \quad (22)$$

$$M_{1x} = \frac{-D}{\delta^2} [(2 \times 0.002934 - 2 \times 0.004058) + 0.3 \times (2 \times 0.002934 - 2 \times 0.004058)] \frac{qa^4}{D} \quad (23)$$

$$M_{1x} = +0.04676 qa^2 = M_{1y}$$

bulunur. Analitik çözüm sonucu $M_{1x}=M_{1y}=+0.0479 qa^2$ dir. SAP90 ile 16 eleman kullanarak $M_{1x}=M_{1y}=+0.0501 qa^2$ ve 64 eleman kullanarak $M_{1x}=M_{1y}=+0.0501 qa^2$ bulunmuştur. Şayet Lagrange interpolasyon polinomlarından yararlanılarak ara ağ düğümlerinde, başlangıca göre $x=y=\delta/2=a/8$ de Lagrange fonksiyonları kullanarak çökme değeri hesaplanırsa:

$$w_{x=\delta/2}=(-.15625 \times 0.002934 + 0.703125 \times 0.004058 + 0.46875 \times 0.002934) qa^4/D = 0.00377 qa^4/D$$

bulunur. $w_{x=\delta/2}=0.00377 qa^4/D$ değeri ile 1 nolu merkez düğümünde, eğilme momenti ifadeleri $\lambda=\delta/2=a/8$ için yeniden hesaplanırsa:

$$M_{1x} = \frac{-D}{\lambda^2} [(2 \times 0.00377 - 2 \times 0.004058) + 0.3 \times (2 \times 0.00377 - 2 \times 0.004058)] \frac{qa^4}{D}$$

$$M_{1x} = M_{1y} = +0.0479 qa^2$$

analitik çözüm sonucuyla, tüm basamak değerleri ile doğru olarak bulunur.

Sonuçlar

Geliştirilen sonlu fark yöntemi, diğer sonlu fark yöntemleriyle (klasik, ip poligonu gibi) karşılaştırıldığında sonlu fark ifadesinin farklı olduğu görülür. Örneklerden görüldüğü gibi,

geliştirilmiş sonlu farklar yöntemi ile yapılan çözümler sonucu, plak problemlerinin çözümlerinde, diğer sayısal yöntemlere göre oldukça yüksek hassasiyet ve performans sağlanmıştır.

Geliştirilmiş sonlu farklar yöntemi, klasik sonlu farklar yöntemi gibi formülasyonu basit, çok yönlü ve kullanışlıdır.

Daha sık ağ kullanılarak elde edilen sonuçlar yaklaşıklığa fazla etki etmemektedir. Ayrıca her türlü yük durumu için çözümlerin bulunması kolaylaşmıştır. Problemlerin çözümü için çok sayıda ağ düğümlerine ihtiyaç duyulmadığından, özellikle elle çözümler için uygundur. Oysaki; gerek diğer sonlu farklar yöntemlerinde, gerekse sonlu elemanlar yöntemi çözümlerinde yakınsaklığı sağlamak için çok sayıda bilinmeyen gerektiğinden bilgisayar programına ihtiyaç duyulur. Bu özelliği sayesinde plak teorisi derslerinde yardımcı metot olarak kullanılır.

İç kuvvetler, ağ düğümlerinde bulunan w_{mn} çökme değerlerine bağlı olarak sonlu fark ifadelerinden hesaplanıldığında, pek çok durumda kabul edilebilir sonuçlar elde edilmektedir.

Ankastre mesnet sınır koşullarında çökmedeki hatanın %2 mertebesinde olmasının nedeni, Betti teoreminde kesin değeri bilinmeyen mesnet tepkilerinin işinin hesaplanmasından kaynaklanmaktadır.

Boşta kenar sınır koşulları için de, geliştirilen sonlu fark yönteminin çıkartılması prensibine uygun, sonlu fark operatörü hesaplanarak çözümler elde edilebilir.

Semboller

$L_i(x), L_i(y)$:Lagrange fonksiyonları
$w(x,y)$:Plak çökme yüzeyi
$w_i(x,y)$:Tanımlanan sonsuz plak çökme yüzeyi
w_{ij}	:Ağ düğümlerinde çökme değerleri
$q(x,y)$:Plak düzlemine dik yük
q_{ij}	:Ağ düğümlerinde plak yük bileşeni
$[\Delta]$:Diferansiyel operatörün sonlu fark ifadesi
δ	:Sonlu fark aralığı

D	:Plak eğilme rijitliği
m, n	:Sonlu fark ağ düğümleri
$P_I(x,y)$:Tanımlanan sonsuz plak çökme yüzeyini oluşturan bölge dış yükleri
$V_I(x), V_I(y)$:Tanımlanan sonsuz plak çökme yüzeyini oluşturan bölge sınırlarındaki eşdeğer kesme kuvvetler

Kaynaklar

- Berktaş, İ. (1992). *Plak teorisi ve uygulamaları*, Yıldız Teknik Üniversitesi Müh. Fak. İnşaat Müh. Bölümü., 237, İstanbul.
- Bares, R. (1979). Tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphragms based on the Elastic Theory, 3.Revised. Bauverlag GmbH. Berlin, Germany.
- Çakıroğlu, A. ve Kayan, İ. (1963). Exact forms of finite difference for certain differential equations, *İ.T.Ü Bülteni*, **16**, 75-99.
- Çakıroğlu, A. ve Kumbasar, N. (1995). İnce plaklar için sonlu fark denkleminin kesin şekli ve uygulamaları, *Prof. İ.Turan Sabis Anısına Sempozyum*, İstanbul.
- Kumbasar, N. ve Çakıroğlu, A. (1998). İnce plaklar için Betti teoremi ile elde edilmiş bir sonlu fark yöntemi, *Henüz Yayınlanmamış*.
- Kumbasar, N., Pala, S., Altan, M. ve Aydoğan, M. (1992). *Bilgisayar programları ile sayısal hesap*, TMMOB İnşaat Mühendisler Odası, İstanbul.
- Kumbasar, N. (1999). Plak Sonlu Fark Denklemlerinde Sınır Koşulu bağlantılarının iyileştirilmesi, XI. Ulusal Mekanik Kongresi, Bolu, 6-10 Eylül, 449-458.
- Szilar, R. (1974). *Theory and Analysis of Plates*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Timoshenko, S., Çevirenler: İnan, M. ve Sönmez, F. (1964). *Plak ve kabuklar teorisi*, 2. Baskı. İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, 592, İstanbul.
- Wilson, E. L., Habibullah, A., (1989). *SAP90 Structural analysis programs, version 5.1 series of computer programs for the static and dynamic finite element analysis of structures*, Computer & Structures, Berkeley, California.